数理解析研究所講究録
680巻 1989年 183-192

種々の需要形態に関する動的在庫モデル

九大経済　児玉正憲　(Masanori Kodama)

本論文では，需要量が連続的な動的在庫モデルについて，多くの需要形態を含む統合モデルを導入し，過剰需要が後期需要として取扱われる場合の最適政策を検討する．

1.　有限期間モデル

発注量は発注間隔の期首に即時的にみたされ，各期の需要量は互いに独立で同じ分布にしたがい，需要は一般的な関数にしたがって発生するN期間の動的な購入・販売在庫モデルを取りあげる。　また，過剰需要は後期の需要とみなされるものとする．　まず

B：各期の発注間隔の間の需要量を表す確率変数

$P(B \leqq b)=\int_0^b \phi(t)\,dt$，　bはBの実現値，$E(B)=\int_0^\infty b\phi(b)\,db<\infty$

x：初期の在庫量

z：$z-x$だけ発注した後の期首在庫量

c：購入コスト（単位あたり）

h：在庫維持コスト（単位時間，単位あたり）

p：品切れコスト（単位時間，単位あたり），$p>c$

α：割引率（$0<\alpha<1$）

$f_n(x)$：初期在庫量をxとしたとき，n期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策をとったときの費用関数

とする。各期の時間間隔をtとする。各期における需要量Bの実現値bが与えられたとき，期における需要の発生は

$$bg(T/t) \qquad (0\leqq T\leqq t) \tag{1}$$

にしたがうものとする．ここに

$g(x)$は$g(0)=0$，$g(1)$となる$dg(x)/dx>0$なる関数である（$0\leqq x\leqq 1$）。

時点Tの在庫量を$Q(T)$とすると，

$$Q(T)=z-g(T/t), \qquad 0\leqq T\leqq t \tag{2}$$

である．需要量がbのとき，(i) $0\leqq b\leqq z$，(ii) $b>z\geqq 0$ (iii) $z<0$の場合に応じて在庫量の状態は図1のようになる。このとき，期（発注間隔あたり）平均在庫量（$I_1(b)$），期平均在庫不足量（$I_2(b)$）は以下のようになる。

(i) $0\leqq b\leqq z$の場合

$$I_1(b)=\frac{1}{t}\int_0^t[z-bg(T/t)]dT=z-bG(1) \tag{3}$$

ここに，$G(x)=\int_0^x g(y)dy$ (4)

$$I_2(b)=0 \tag{5}$$

(ii)　$b > z \geqq 0$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t}\int_0^{t_1}[z - bg(T/t)]\,dT = z(t_1/t) - bG(t_1/t) \qquad (6)$$

図1より，t_1時点では

$$Q(t_1) = z - bg(t_1/t) = 0 \qquad (7)$$

が成り立つ。　$g(y)$は狭義増加関数であるから(7)をt_1/tについて解いて

$$t_1/t = g^{-1}(z/b) \qquad (8)$$

とおくと　$\partial g^{-1}(z/b)/\partial z > 0$。　(8)を(6)に代入して，

$$I_1(b) = zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b) \qquad (9)$$

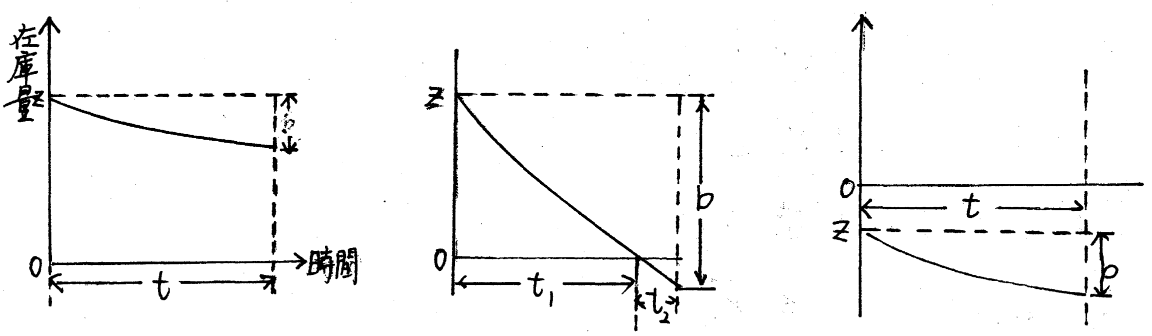
となる。　また，$I_2(b)$についても(8)を用いて

$$I_2(b) = \frac{1}{t}\int_{t_1}^{t}[bg(T/t) - z]\,dT = b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)] \qquad (10)$$

(iii)　$z < 0$ の場合

$$I_1(b) = 0 \qquad (11)$$

$$I_2(b) = \frac{1}{t}\int_0^{t}[bg(T/t) - z]\,dT = bG(1) - z \qquad (12)$$



(i)　$0 \leqq b \leqq z$　　(ii)　$b > z \geqq 0$　　(iii)　$z < 0$

ところが需要量Bは確率変数であるので期待期平均在庫量I_1，期待期平均在庫不足量I_2は次のようになる。

$z>0$ の場合

$$I_1 = E\{I_1(B)\} = \int_0^\infty I_1(b)\phi(b)\,db$$
$$= \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)\,db + \int_z^\infty [z g^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\,\phi(b)\,db \qquad (13)$$

$$I_2 = E\{I_2(B)\} = \int_0^\infty I_2(b)\phi(b)\,db$$
$$= \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)\,db \qquad (14)$$

$z<0$ の場合

$$I_1 = 0 \qquad (15)$$

$$I_2 = E\{I_2(B)\} = \int_0^\infty I_2(b)\phi(b)\,db = \int_0^\infty [bG(1) - z]\,\phi(b)\,db \qquad (16)$$

したがって，このモデルの第1期の期待費用 $L^*(z;x)$ は，

$$L^*(z;x) = C\cdot(z-x) + h\left\{\int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)\,db + \int_0^\infty [z g^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\,\phi(b)\,db\right\}$$
$$+ p\int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)\,db, \qquad z>0 \qquad (17)$$

$$L^*(z;x) = C\cdot(z-x) + p\int_z^\infty [bG(1) - z]\phi(b)\,db, \qquad z<0 \qquad (18)$$

このモデルにおける $f_n(x)$ を $f_n^*(x)$ で表すと，最適性の原理より

$$f_1^*(x) = \mathop{Min}_{z \geqq x}\{L^*(z;x)\} \qquad (19)$$

$$f_n^*(x) = \mathop{Min}_{z \geqq x}\left\{L^*(z;x) + \alpha\int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)\,db\right\} \qquad (20)$$

このとき，次の定理をうる。

定理1　最適政策は

$$z = \bar{x}_n^*, \qquad x \leqq \bar{x}_n^*$$

$$z = x, \qquad x > \bar{x}_n^*$$

である。　ここに $\bar{x}_n^*$ は

$$p = C + (h+p)\left\{\int_0^{\bar{x}_n^*}\phi(b)\,db + \int_{\bar{x}_n^*}^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)\,db + \alpha\int_0^\infty f_{n-1}^{*\prime}(\bar{x}_n^* - b)\phi(b)\,db \qquad (21)$$

の唯一の根である[1]。 ここに $f_0^{*\prime}=0$ とする。

証明 帰納法による。

(i) $n=1$ の場合, $z<0$ のとき

$$L^*(z;x)=-Cx+H_1^*(z) \tag{22}$$

$$H_1^*(z)=Cz+p\int_0^\infty [bG(1)-z]\phi(b)db \tag{23}$$

$$H_1^{*\prime}(z)=C-p<0 \tag{24}$$

$z>0$ のとき,

$$L^*(z;x)=-Cx+H_2^*(z) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}H_2^*(z)=Cz+h\Big\{&\int_0^z[z-bG(1)]\phi(b)db+\int_z^\infty[zg^{-1}(z/b)-bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db\Big\}\\&+p\int_z^\infty\{b[G(1)-G(g^{-1}(z/b))]-z[1-g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db\end{aligned} \tag{26}$$

$$H_2^{*\prime}(z)=C-p+(h+p)\Big\{\int_0^z\phi(b)db+\int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db\Big\} \tag{27}$$

$$H_2^{*\prime\prime}(z)=(h+p)\int_z^\infty\frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}\phi(b)db \tag{28}$$

となる。 $H_1^*(0)=H_2^*(0)=pG(1)E(B)$, すべての $z<0$ に対して, $H_1^{*\prime}(z)<0$, $H_2^{*\prime}(0)=C-p<0$ であるから, $z>0$ の場合を考察すれば十分である。 $\bar{x}_1^*$ が (21) をみたすことは $\phi(b)>0$ に対して $H_2^{*\prime\prime}(z)>0$ および $\lim_{z\to\infty}H_2^{*\prime}(z)>0$ 示される。 $\phi(b)\geqq 0$ となる場合は $H_2^{*\prime\prime}(z)\geqq 0$ となり 注[1]のように $\bar{x}_1^*$ をきめる。 このとき

$$f_1^{*\prime}(x)=-C,\qquad x\leqq\bar{x}_1^* \tag{29}$$

$$f_1^{*\prime}(x)=(h+p)\Big\{\int_0^x\phi(b)db+\int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)db\Big\}-p,\quad x\geqq\bar{x}_1^*,\ f_1^{*\prime}(\infty)>0 \tag{30}$$

---

1) ある閉区間におけるすべての値が根となる場合が起るかもしれない。 このときは最小値を唯一の根 $\bar{x}_n^*$ とする

$$f_1^{*''}(x) = (h+p)\int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)db \geqq 0, \quad x \geqq \bar{x}_1^* \tag{31}$$

$\phi(b)>0 \quad (b>0)$ のときは，$f_1^{*''}(x)>0$ となる。

(ii) $n=2$ のとき

$$L^*(z;x)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db$$

$$=\begin{cases} -Cx+H_1^*(z)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z<0 \quad (32) \\ -Cx+H_2^*(z)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z>0 \quad (33) \end{cases}$$

(23), (26), (24), (27), (29) より，$H_1^*(0)=H_2^*(0)$，$H_1^{*\prime}(z)+\alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime}(z-b)\phi(b)db$ $=C(1-\alpha)-p<0$，$H_2^{*\prime}(0)=C(1-\alpha)-p<0$ となるので，$z>0$ の場合を考えれば十分である。$\bar{x}_2^*$ は (33) を z で微分し，0 とおいて得られる。つまり

$$C=p-(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db\right\}-\alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime}(z-b)\phi(b)db \tag{34}$$

をみたす z である。(34) の右辺を $F_1(z)$ とおくと，(29)～(31) より

$$F_1'(z)=-(h+p)\int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}\phi(b)db-\alpha\int_0^\infty f_1^{*''}(z-b)\phi(b)db \leqq 0$$

$\phi(b)>0$ のときは，$F_1'(z)<0$

$$F_1(0)=p-\alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime}(-b)\phi(b)db=p+\alpha C>0, \quad F_1(\infty)<0$$

であるから (34) は唯一の根をもつ。最適購入政策は

$z=\bar{x}_2^*, \quad x \leqq \bar{x}_2^*$

$z=x, \quad x>\bar{x}_2^*$

である。この場合 (i) と同様に

$f_2^{*\prime}(x)=-C, \quad x \leqq \bar{x}_2^*$

$$f_2^{*\prime}(x)=(h+p)\left\{\int_0^x\phi(b)db+\int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)db\right\}+\alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime}(x-b)\phi(b)db-p, \quad x \geqq \bar{x}_2^*$$

$$f_2^{*\prime}(\infty) > 0$$

$$f_2^{*\prime\prime}(x) = (h+p)\int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)\,db + \alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime\prime}(x-b)\phi(b)\,db \geqq 0, \qquad x \geqq \bar{x}_2^*$$

(iii) $n=k$のとき定理が成立しているとする。 このとき

$$f_k^{*\prime}(x) = -c, \qquad x \leqq \bar{x}_k^* \tag{35}$$

$$f_k^{*\prime}(x) = (h+p)\left\{\int_0^x \phi(b)\,db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)\,db\right\} + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}^{*\prime}(x-b)\phi(b)\,db - p, \quad x \geqq \bar{x}_k^* \tag{36}$$

$$f_k^{*\prime}(\infty) > 0 \tag{37}$$

$$f_k^{*\prime\prime}(x) = (h+p)\int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)\,db + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}^{*\prime\prime}(x-b)\phi(b)\,db \geqq 0, \qquad x \geqq \bar{x}_k^* \tag{38}$$

ここに $\bar{x}_k^*$は次の方程式の唯一の根である。

$$c = p - (h+p)\left\{\int_0^x \phi(b)\,db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)\,db\right\} - \alpha\int_0^\infty f_{k-1}^{*\prime}(x-b)\phi(b)\,db$$

このとき

$$f_{k+1}^*(x) = \underset{z \geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{L^*(z;x) + \alpha\int_0^\infty f_k^*(z-b)\phi(b)\,db\right\} \tag{39}$$

$$L^*(z;x) + \alpha\int_0^\infty f_k^*(z-b)\phi(b)\,db$$

$$= \begin{cases} -cx + H_1^*(z) + \alpha\int_0^\infty f_k^*(z-b)\phi(b)\,db, & z < 0 \quad (40) \\ -cx + H_2^*(z) + \alpha\int_0^\infty f_k^*(z-b)\phi(b)\,db, & z > 0 \quad (41) \end{cases}$$

(ii)と同様な議論より$z > 0$の場合のみ考えれば十分である

$\bar{x}_{k+1}^*$は(41)をzで微分して，0とおいて得られる。

$$c = p - (h+p)\left\{\int_0^z \phi(b)\,db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)\,db\right\} - \alpha\int_0^\infty f_k^{*\prime}(z-b)\phi(b)\,db \tag{42}$$

をみたすzのことである。 (42)の右辺を$F_k(z)$とおくと

(35)～(38)より

$$F_k'(z) = -(h+p)\int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}\phi(b)\,db - \alpha\int_0^\infty f_k^{*\prime\prime}(z-b)\phi(b)\,db \leqq 0$$

$$F_k(0) = p - \alpha\int_0^\infty f_k^{*\prime}(-b)\phi(b)\,db = p + \alpha c > c, \qquad F_k(\infty) < 0$$

となるから(42)は唯一の根をもつ。最適購入政策は

$$z=\bar{x}^*_{k+1}, \quad x\leqq\bar{x}^*_{k+1}$$

$$z=x, \quad x>\bar{x}^*_{k+1}$$

である。よって定理は証明された。

この動的モデルにおける $\bar{x}^*_n$, $f^*_n(x)$ について次の定理を得る。

定理2.

(a) $f^{*\prime}_{n-1}(x)>f^{*\prime}_n(x)>-p$

(b) $f^{*\prime\prime}_n(x)\geqq 0$

(c) $\bar{x}^*_n>\bar{x}^*_{n-1}$

ただし $f^{*\prime}_0=h$, $\bar{x}^*_0=0$ とする。

証明 (b)は定理1の証明の中で示されている。(a), (b)は帰納法による。(省略)

注意 $g(x)=1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ で表現される単純な特定モデルでは $dg(x)/dx>0$ をみたさないが, $g^{-1}(x/b)=0$ とおけば, 定理1定理2は成立する。

2. 同値問題

これからの議論をすすめるために, $g(x)=1$, $(0\leqq x\leqq 1)$ の場合の(17)を $L(z;x,\phi)$ とおく, これは(17)で $g^{-1}(x/b)=0$ として.

$$L(z;x,\phi)=C\cdot(z-x)+h\int_0^z(z-b)\phi(b)db+p\int_z^\infty(b-z)\phi(b)db \tag{43}$$

また(17)を $L^*(z;x,\phi)$ とおき, あらためて

$$f_1(x;\phi)=\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\{L(z;x,\phi)\}$$

$$f_2(x;\phi,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b;\phi)\phi(b)db\right\}$$
$$f_n(x;\phi,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_{n-1}(z-b;\phi,\phi)\phi(b)db\right\} \quad (44)$$
$$n=3,4,\cdots N$$

$$f_1^*(x;\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L^*(z;x,\phi)\right\}$$
$$f_2^*(x;\phi,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L^*(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(z-b;\phi)\phi(b)db\right\} \quad (45)$$
$$f_n^*(x;\phi,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L^*(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b;\phi,\phi)\phi(b)db\right\}$$
$$n=3,4,\cdots N$$

とおく。 (31)の右辺を$(h+p)$で割ったものを$\gamma(x)$とおく

$$\gamma(x)=\int_x^\infty\frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)db \qquad (46)$$

このとき，$\gamma(x)\geqq 0$，$\int_0^\infty\gamma(x)dx=1$が容易に示される． つまり$\gamma(x)$は確率密度関数である。 ここで(43)の$\phi(b)$を$\gamma(b)$でおきかえたものを$L(z;x,\gamma)$とおき

$$f_1(x;\gamma)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L(z;x,\gamma)\right\}$$
$$f_2(x;\gamma,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L(z;x,\gamma)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b;\gamma)\phi(b)db\right\} \quad (47)$$
$$f_n(x;\gamma,\phi)=\underset{z\geqq x}{Min}\left\{L(z;x,\gamma)+\alpha\int_0^\infty f_{n-1}(z-b;\gamma,\phi)\phi(b)db\right\}$$
$$n=3,4,\cdots N$$

を定義する． このとき，次の定理をうる。

定理3 次の関係式が成立する。

$$f_n^*(x;\phi,\phi)=f_n(x;\gamma,\phi)$$

証明 帰納法による

(1) $n=1$の場合 $L(z;x,\gamma)$，$L^*(z;x,\phi)$のzに関する微分は

$$L(z;x,\gamma)'=c+h\int_0^z\gamma(b)\,db-p\int_z^\infty\gamma(b)\,db \tag{50}$$

$$L(z;x,\gamma)''=(h+p)\gamma(z) \tag{51}$$

$$L^*(z;x,\phi)'=c-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)\,db+\int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)\,db\right\} \tag{52}$$

$$L^*(z;x,\phi)''=(h+p)\int_z^\infty\frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}\phi(b)\,db \tag{53}$$

となる。 $\gamma(z)$は(46)で定義されているから

$$L(z;x,\gamma)''=L(z;x,\phi)'' \tag{54}$$

$$L(z;x,\gamma)'=L(z;x,\phi)+c_1 \qquad (c_1\text{は積分定数})$$

(50), (52)で$z=0$とおくと, $g^{-1}(0)=0$, 故に$c_1=0$, よって

$$L(z;x,\gamma)=L^*(z;x,\phi)+c_2 \qquad (c_2\text{は積分定数})$$

$$\int_0^\infty z\gamma(z)\,dz=\int_0^\infty z\left(\int_0^\infty\frac{\partial g^{-1}(z/x)}{\partial z}\phi(x)\,dx\right)dz=\int_0^\infty\phi(x)\left(\int_0^x z\frac{\partial g^{-1}(z/x)}{\partial z}dz\right)dx$$
$$=\int_0^\infty\phi(x)\left[xG(g^{-1}(z/x))\right]_0^x dx=G(1)E\{B\}<\infty$$

を用いると

$$L^*(0;x,\phi)=-c\cdot x+pG(1)E\{B\}=-c\cdot x+p\int_0^\infty b\gamma(b)\,db=L(0,x,\gamma)$$

となり, $c_2=0$となる。 よって証明された。

(II) $n=k$のとき, 定理が成立しているとする。 つまり

$$f_k^*(x;\phi,\phi)=f_k(x;\gamma,\phi) \qquad (x\geqq 0)$$

とする。 このとき

$$f_{k+1}^*(x;\phi,\phi)=\underset{z\geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{L^*(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_k^*(z-b;\phi,\phi)\phi(b)\,db\right\}$$
$$=\underset{z\geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{L(z;x,\phi)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b;\gamma,\phi)\phi(b)\,db\right\}$$
$$=f_{k+1}(x;\gamma,\phi)$$

無限期間モデルについても類似の定理が成立する。